MATHEMATIQUES - 2nde — Année Scolaire 2023-2024

Evaluation n°10 - *(Correction)* — Jeudi 23 mai 2024

Exercice 1

1. Pour montrer que l'équation cartésienne de la droite (BC) est $3x+8y-4=0$, on pose le point M de coordonnées $M(x,y)$ appartenant à la droite (BC) et on déterminer ensuite les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4-(-4) \\ -1-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-(-4) \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+4) \\ y-2 \end{pmatrix}$$

Comme le point M appartient à la droite (BC), les trois points M, B et C sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont donc colinéaires. Leur déterminant est donc nul :

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BM}\right) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 8 & x+4 \\ -3 & y-2 \end{vmatrix} &= 0 \\ 8\times(y-2)-(-3)(x+4) &= 0 \\ 8y-16-3x-12 &= 0 \\ 8y-16+3x+12 &= 0 \\ 3x+8y-4 &= 0 \end{aligned}$$

On obtient bien l'équation de la droite demandée.

2. L'équation de la droite (BC) étant $3x+8y-4=0$, on remplace les coordonnées du point A dans l'équation :

$$\begin{aligned} 3x_A+8y_A-4 &= 3\times 2+8\times 3-4 \\ 3x_A+8y_A-4 &= 6+24-4 \\ 3x_A+8y_A-4 &= 26 \end{aligned}$$

On remarque que $3x_A+8y_A-4 \neq 0$: le point A n'appartient pas à la droite (BC)

3. Comme l'équation cartésienne de la droite (BC) est $3x+8y-4=0$ alors son équation réduite donne :

$$\begin{aligned} 3x+8y-4 &= 0 \\ 8y &= -3x+4 \\ y &= \frac{-3}{8}x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'équation réduite de la droite (BC) est $y=\frac{-3}{8}x+\frac{1}{2}$.

4. Comme l'équation cartésienne de la droite (BC) est $3x+8y-4=0$ alors un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$

5. Comme la droite (d) est parallèle à la droite (BC) alors elles ont le même vecteur directeur. Par conséquent, l'équation cartésienne s'écrit $3x+8y+c=0$. Comme la droite passe par le point A, alors les coordonnées vérifient l'équation :

$$\begin{aligned} 3x_A+8y_A+c &= 0 \\ 3\times 2+8\times 3+c &= 0 \\ 6+24+c &= 0 \\ c &= -30 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (d) est $3x+8y-30=0$.

Exercice 2

1. Les calculs des longueur des côtés du triangle donnent :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{AC}\right\| &= \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} \\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| &= \sqrt{(3-(-1))^2+(-1-5)^2} \\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| &= \sqrt{4^2+(-6)^2} \\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| &= \sqrt{52} \\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| &= 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{(-5-(-1))^2+(-1-5)^2} \\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{(-4)^2+(-6)^2} \\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{52} \\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(3-(-5))^2 + (-1-(-1))^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(8)^2 + (0)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 8$$

A partir des longueurs calculées, on en déduit que le triangle est isocèle. L'utilisation de la contraposée du théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que le triangle n'est pas rectangle.

2. Le calcul des coordonnées des points I, J et K donne :

$$I\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \qquad J\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad K\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{5-1}{2}\right) \qquad J\left(\frac{-1-5}{2}; \frac{5-1}{2}\right) \qquad K\left(\frac{-5+3}{2}; \frac{-1-1}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{2}{2}; \frac{4}{2}\right) \qquad J\left(\frac{-6}{2}; \frac{4}{2}\right) \qquad K\left(\frac{-2}{2}; \frac{-2}{2}\right)$$
$$I\,(1;2) \qquad J\,(-3;2) \qquad K\,(-1;-1)$$

Les coordonnées sont $I\,(1;2)$; $J\,(-3;2)$ et $K\,(-1;-1)$.

3. Le nom apporté aux droites (AK), (CJ) et (IB) est la médiane. La détermination de leur équation cartésienne donne :

Pour la droite (AK) :

Avec $A\,(-1,5)$ et $K\,(-1;-1)$

on a $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$

Avec $A\,(-1,5)$ et $M\,(x;y)$

on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires donc

$\det\left(\overrightarrow{AK};\overrightarrow{AM}\right) = 0$

$\begin{vmatrix}0 & x+1\\-6 & y-5\end{vmatrix} = 0$

$0 \times (y-5) - (-6) \times (x+1) = 0$

$6x + 6 = 0$

$x + 1 = 0$

Pour la droite (CJ) :

Avec $C\,(3,-1)$ et $J\,(-3;2)$

on a $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$

Avec $C\,(3,-1)$ et $M\,(x;y)$

on a $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CM}$ colinéaires donc

$\det\left(\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CM}\right) = 0$

$\begin{vmatrix}-6 & x-3\\3 & y+1\end{vmatrix} = 0$

$-6 \times (y+1) - 3 \times (x-3) = 0$

$-6y - 6 - 3x + 9 = 0$

$x + 2y - 1 = 0$

Pour la droite (BI) :

Avec $B\,(-5,-1)$ et $I\,(1;2)$

on a $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

Avec $B\,(-5,-1)$ et $M\,(x;y)$

on a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+5\\y+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires donc

$\det\left(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BM}\right) = 0$

$\begin{vmatrix}6 & x+5\\3 & y+1\end{vmatrix} = 0$

$6 \times (y+1) - 3 \times (x+5) = 0$

6y+6-3x-15=0

-x+2y-3=0

4. Le nom apporté au point d'intersection noté D des trois droites (AK), (CJ) et (IB) est le centre de gravité. Ses coordonnées se déterminent en résolvant par substitution par exemple le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x+1 &= 0 \\ x+2y-1 &= 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -1 \\ x+2y-1 &= 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -1 \\ -1+2y-1 &= 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -1 \\ 2y &= 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -1 \\ y &= 1 \end{cases}$$

Le point D a pour coordonnées $D(-1;1)$.

Le schéma suivant n'était pas demandé mais il est apporté ici pour accompagner la correction :