MATHEMATIQUES - 2^{nde} Année Scolaire 2023-2024

Evaluation n°9 - *(Correction)* Vendredi 3 mai 2024

Exercice 1

x	-7		-2π		$-\pi$		π		2π		7
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-7		0		7
Signe de $g(x)$		$+$	0	$+$	

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ sur I revient à chercher les abscisses des points de la courbe (C_f) tels que les ordonnées soient égales à celles des points de la courbe (C_f). Graphiquement, on trouve, avec la précision permise du graphique, $x = -0,9$ et $x = 0,9$.

3. Résoudre l'équation $f(x) \geqslant (x)$ sur I revient à chercher les abscisses des points de la courbe (C_f) tels que les ordonnées soient inférieures ou égales à celles des points de la courbe (C_f). Graphiquement, on trouve, avec la précision permise du graphique, l'ensemble des valeurs de x représentées par l'intervalle $[-7;-0,9] \cup [0,9;7]$.

Exercice 2

1. Une factorisation de $f(x)$ donne :

$$f(x) = 36x^3 - 25x$$
$$f(x) = x\left(36x^2 - 25\right)$$
$$f(x) = x(6x-5)(6x+5)$$

Une factorisation de $f(x)$ donne $x(6x-5)(6x+5)$.

2. Résolvons l'inéquation $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$:

La fonction $x \longmapsto 6x-5$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est 6. Comme $6 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$6x - 5 = 0$$
$$6x = 5$$
$$x = \frac{5}{6}$$

La fonction $x \longmapsto 6x+5$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est 6. Comme $6 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$6x + 5 = 0$$
$$6x = -5$$
$$x = \frac{-5}{6}$$

Le tableau de signe devient alors :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		0		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $6x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $6x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A partir du tableau, les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont dans l'ensemble S tel que :
$S = \left]\frac{-5}{6};0\right[\cup \left]\frac{5}{6};+\infty\right[$.

Exercice 3

1 La détermination des ensembles de définition donne :

Pour la fonction f, on résout l'équation $x+3=0$:

$$\begin{aligned} x+3&=0\\ x&=-3 \end{aligned}$$

Pour la fonction g, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

On en conclue que $D_f = \mathbb{R}-\{-3\}$ et $D_g = \mathbb{R}$.

2 Résolvons l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant g(x)\\ \frac{x^2+2x}{x+3} &\geqslant x\\ \frac{x^2+2x}{x+3}-x &\geqslant 0\\ \frac{x^2+2x}{x+3}-\frac{x(x+3)}{x+3} &\geqslant 0\\ \frac{x^2+2x-x^2-3x}{x+3} &\geqslant 0\\ \frac{-x}{x+3} &\geqslant 0 \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto -x$ est une fonction linéaire dont le coefficient directeur est -1. Comme $-1 < 0$, la fonction est décroissante et la valeur charnière est 0.

La fonction $x \longmapsto x+3$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est 1. Comme $1 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Le tableau de signe devient alors :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$-$	||	$+$	0	$-$	

A partir du tableau, les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont dans l'ensemble S tel que :
$S =]-3;0]$.

Exercice 4

L'inéquation se résout de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\leqslant h(x) \\ \frac{2x-1}{x+3} + \frac{3x}{x-3} &\leqslant \frac{2x^2+3}{x^2-9} \\ \frac{2x-1}{x+3} + \frac{3x}{x-3} - \frac{2x^2+3}{x^2-9} &\leqslant 0 \\ \frac{(2x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{3x(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{2x^2+3}{(x-3)(x+3)} &\leqslant 0 \\ \frac{2x^2-6x-x+3+3x^2+9x-2x^2-3}{(x-3)(x+3)} &\leqslant 0 \\ \frac{3x^2+2x}{(x-3)(x+3)} &\leqslant 0 \\ \frac{x(3x+2)}{(x-3)(x+3)} &\leqslant 0 \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto x$ est une fonction linéaire dont le coefficient directeur est 1. Comme $1 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière est 0.

La fonction $x \longmapsto 3x+2$ est une fonction linéaire dont le coefficient directeur est 3. Comme $3 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} 3x+2 &= 0 \\ 3x &= -2 \\ x &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto x+3$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est 1. Comme $1 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto x-3$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est 1. Comme $1 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} x-3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Le tableau de signe devient alors :

x	$-\infty$		-3		$\frac{-2}{3}$		0		3		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du quotient		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

A partir du tableau, les solutions de l'inéquation $f(x)+g(x) \leqslant h(x)$ sont dans l'ensemble S tel que : $S = \left]-3;\frac{-2}{3}\right] \cup [0;3[$.