MATHEMATIQUES - 2nde Année Scolaire 2023-2024

Evaluation n°9 - *Rattrapage - (Correction)* Mardi 21 mai 2024

Exercice 1

1. Le tableau de signe de la fonction g donne :

x	-2		-1		2		5
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ sur I revient à chercher les abscisses des points de la courbe (C_f) tels que les ordonnées soient égales à celles des points de la courbe (C_f). Graphiquement, on trouve, avec la précision permise du graphique, $x = -1,12$ et $x = 2,12$.

3. Résoudre l'équation $f(x) \leqslant (x)$ sur I revient à chercher les abscisses des points de la courbe (C_f) tels que les ordonnées soient inférieures ou égales à celles des points de la courbe (C_f). Graphiquement, on trouve, avec la précision permise du graphique, l'ensemble des valeurs de x représentées par l'intervalle $[-1,12;12;5]$.

Exercice 2

1. Une factorisation de $f(x)$ donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)^2 - (3x+7)(x-1) \\
f(x) &= (x-1)\left[(x-1)-(3x+7)\right] \\
f(x) &= (x-1)(x-1-3x-7) \\
f(x) &= (x-1)(-2x-8)
\end{aligned}$$

Une factorisation de $f(x)$ donne $f(x) = (x-1)(-2x-8)$.

2. Résolvons l'inéquation $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$:

La fonction $x \longmapsto x-1$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est 1. Comme $1 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned}
x-1 &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto -2x-8$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est -2. Comme $-2 < 0$, la fonction est décroissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned}
-2x-8 &= 0 \\
-2x &= 8 \\
x &= -4
\end{aligned}$$

Le tableau de signe devient alors :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-2x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

A partir du tableau, les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont dans l'ensemble S tel que $S =]-4;1[$.

Exercice 3

1 La résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ donne :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
\frac{5x-x^2}{1+x} &= 1-x \\
\frac{5x-x^2}{1+x} - 1 + x &= 0 \\
\frac{5x-x^2}{1+x} + \frac{(-1+x)(1+x)}{1+x} &= 0 \\
\frac{5x-x^2}{1+x} + \frac{x^2-1}{1+x} &= 0 \\
\frac{5x-1}{1+x} &= 0
\end{aligned}
$$

Un quotient est nul si son numérateur est nul et si son dénominateur est non nul. On résout alors :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
\text{D'une part } 5x-1 &= 0 \qquad\qquad \text{et d'autre part } 1+x \neq 0 \\
5x &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \neq -1 \\
x &= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

La solution de l'équation est donc $x = \dfrac{1}{5}$ et la valeur -1 est une valeur interdite.

2 Résolvons l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geqslant g(x) \\
\frac{5x-1}{1+x} &\geqslant 0 \text{ (On reprend le résultat précédent)}
\end{aligned}
$$

La fonction $x \longmapsto 5x-1$ est une fonction linéaire dont le coefficient directeur est 5. Comme $5>0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} 5x-1&=0\\ 5x&=1\\ x&=\frac{1}{5} \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto x+1$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est 1. Comme $1>0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} x+1&=0\\ x&=-1 \end{aligned}$$

Le tableau de signe devient alors :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
Signe de $5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	‖	$-$	0	$+$	

A partir du tableau, les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont dans l'ensemble S tel que : $S =]-\infty;-1[\cup \left[\frac{1}{5};+\infty\right[$.